ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ
по дисциплине «Математика»

дата 9.11.2023

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь)

Тема: «Определённый интеграл. Основные свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла»

1. Определенный интеграл

Обозначение : $\int\limits_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

2. Свойства определенного интеграла

Величина определенного интеграла не зависит от значения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(z)dz \quad \text{и т.д.}$$

Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = 0, \text{ если a=b.}$$

От перестановки пределов интегрирования интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на максимальном из отрезков $[a;\ b]$, $[a;\ c]$, $[c;\ b]$, то справедливо равенство: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (свойство аддитивности определенного интеграла).

Постоянный множитель C можно вынести за знак определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b C\,f(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Определенный интеграл от суммы функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

3. Теорема Ньютона-Лейбница

<u>Теорема:</u> (теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Уважаемые студенты!

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены нами при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям.

Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

4. Методы вычисления определенного интеграла

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3}.$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Bigg|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x^2})dx = \int_{-1}^2 x^2 dx + \int_{-1}^2 2x\cdot dx + \int_{-1}^2 dx + \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^2 + 2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^2 + x\Big|_{-1}^2 + \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_{-1}^2 =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) + \left(2^2 - (-1)^2\right) + \left(2 - (-1)\right) - \frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) + (4-1) + 3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(-1)}\right) = 3 + 3 + 3 + 1{,}5 = 10{,}5$$

Замена переменных

Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Находят новые пределы интегрирования.
5. Производят замену под интегралом.
6. Находят полученный интеграл.

*Пример.*Вычислить $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\ dx$

Решение. Замена:

$t = x^2 - 16;$

$dt = 2x\, dx;$

$xdx = \frac{dt}{2}.$

Найдём новые пределы интегрирования (пределы интегрирования подставляем в t)

$x = 4$, $\alpha = t(4) = 4^2 - 16 = 0;$

$x = 5$, $\beta = t(5) = 5^2 - 16 = 9.$

Получаем:

$$\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\ dx = \int_0^6 \frac{1}{2}\sqrt{t}\ dt = \frac{1}{2}\int_0^6 t^{\frac{1}{2}}\ dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^9 = \frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^9 = \frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{9} = 9.$$

Интегрирование по частям

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\pi} xsinx\ dx$

Решение

$$\int_0^{\pi} xsinx\ dx =$$

$$\left|\begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ \sin x\, dx = dv \ \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix}\right|$$

$$= -xcosx|_0^{\pi} + \int_1^2 \cos x\, dx = -\pi\cdot(-1) + 0 + \sin x|_0^{\pi} = \pi.$$

Конспект и практическую работу № 9 отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru